Como me quiero acercar a $x=3$, mi aprox. inicial, $P_0 = 2{,}5$

1	2,5
2	2,959595960
3	2,999791764
4	2,999999995
5	3,000000000

31/05/21

TEMA 12: PARTE II
Técnicas de aceleración

Técnicas que aceleran la convergencia de ≠ métodos ya visto.

Δ^2 DE AITKEN

Acelera una convergencia que sea lineal, independiente de su origen.
Vale para CUALQUIER MÉTODO.

$$\boxed{\hat{P}_n = P_n - \frac{(P_{n+1} - P_n)^2}{P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n}}$$

Para conseguir $\hat{P}_n$ necesito P_n, P_{n+1} y P_{n+2}, 3 iterados. Pueden ser iterados de cualquier método, 3 iterados consecutivos de cualquiera de los métodos ya visto y consigo una única iterado $\hat{P}_n$.

Δ^2 Aitken dice que $\hat{P}_n$ converge más rápido que P_n.

No es un metodo nuevo, sino una forma de acelerar un metodo que ya existe.

Se puede escribir tb. de otra forma, como diferencia progresiva. La diferencia progresiva de P_n es $P_{n+1} - P_n$

$$\Delta P_n = P_{n+1} - P_n \quad \text{para } n \geq 0$$

Llevado a la K-esima expresión, la diferencia progresiva de orden K P_n es iterar una vez más que la diferencia progresiva K-1 esima para $K \geq 2$

$$\Delta^K P_n = \Delta^{K-1}(\Delta P_n) \quad \text{para } K \geq 2$$

Escrito en forma de diferencias progresivas:

$$\hat{P}_n = P_n - \frac{(P_{n+1} - P_n)^2}{P_{n-2} - 2P_{n+1} + P_n} = P_n - \frac{(\Delta P_n)^2}{\Delta^2 P_n}$$

* Diferencia progresiva de orden K es aplicar la diferencia progresiva a la anterior, que es K-1.

Ejemplo : $f(x) = x^2 - \cos(x)$ con $P_0 = 1$
↳ Hablamos de radianes, hay un coseno

Aplicar punto fijo y acelerar con Δ^2 de Aitken

Reescribir la func como iterac de punto fijo, hay q despejar x

$$x^2 - \cos(x) = 0$$
$$x^2 = \cos(x)$$
$$x = \sqrt{\cos(x)} \longrightarrow g(x) = \pm\sqrt{\cos(x)}$$

me quedo con rama positiva porque sí que converge

Comenzamos a iterar. Si P_0 es 1

P_1 es	$\sqrt{\cos(1)}$	$= 0{,}7350525871$
P_2	$\sqrt{\cos(0{,}73\ldots)}$	$= 0{,}8612755007$
P_3	$\sqrt{\cos(0{,}8612\ldots)}$	$= 0{,}8071371067$
P_4		$0{,}8316063741$
P_5		$0{,}8207859014$
P_6		$0{,}825618791$
7		$0{,}823469674$
8		$0{,}824427236$
9		$0{,}824000957$
10		$0{,}824190798$
11		$0{,}824106268$
15		$0{,}824131288$
20		$0{,}824132330$
25		$0{,}824132312$

Con punto fijo tenemos 25 iteraciones. Con Δ^2 Aitken podemos acelerar y tener menos

Implica crear una nueva sucesión que cada 3 términos aplico la formula:

$$\hat{P}_n = P_n - \frac{(P_{n+1} - P_n)^2}{P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n}$$

$$\hat{P}_0 = P_0 - \frac{(P_1 - P_0)^2}{P_2 - 2P_1 + P_0}$$

$$\hat{P}_0 = 1 - \frac{(0{,}735052587 - 1)^2}{0{,}861275501 - 2 \cdot 0{,}735052587 + 1} = 0{,}8205458675$$

Esto es $\hat{P}_0$, el 1er término de la tecnica de aceleración Δ^2 de Aitken

$$\hat{P}_1 = P_1 - \frac{(P_2 - P_1)^2}{P_3 - 2P_2 + P_1}$$

$$\hat{P}_1 = 0{,}735052587 - \frac{(0{,}861275501 - 0{,}735052587)^2}{0{,}807137107 - 2 \cdot 0{,}861275501 + 0{,}735052587} = 0{,}8233884916$$

RESUMEN: Escojo un metodo, en este caso, punto fijo y calculo todas las iteraciones.

Quiero construir una nueva sucesión con Δ^2 de Aitken para que la convergencia sea más rápida. Y para eso ocupo la formula de $\hat{P}_n$.

Para calcular $\hat{P}_0$ necesito P_0, P_1 y P_2

Cuando calculo un termino mas, P_3, con P_2 y P_1 puedo calcular $\hat{P}_1$

Al calcular P_4 del metodo puedo calcular el $\hat{P}_3$

Para el 1er termino de la suceø sombrero necesito 3 terminos del otro metodo, luego, a cada iteraø del metodo obtengo un nuevo de la suceø sombrero. Que converge mucho mas rapido que la suceø original de los P_n.

n°	Punto fijo	Aitken	
0	1	0,820545868 →	$\hat{P}_0$
1	0,735052587	0,823387630	$\hat{P}_1$
2	0,861275501	0,823989495	$\hat{P}_2$
3	0,807137107	0,824103654	$\hat{P}_3$
4	0,831606374	0,824126663	$\hat{P}_4$
5	0,820785901	0,824131189	$\hat{P}_5$
6	0,825618791	0,824132090	$\hat{P}_6$
7	0,823469674	0,824132268	$\hat{P}_7$
8	0,824427236	0,824132304	$\hat{P}_8$
9	0,824000957	0,824132311	$\hat{P}_9$
10	0,824190798	0,824132312	$\hat{P}_{10}$
11	0,824106268	0,824132312	$\hat{P}_{11}$
15	0,824131288		
20	0,824132330		
25	0,824132312		

STEFFERSEN

Aplicamos el método Δ^2 de Aitken a la iteración de punto fijo. Este método solo sirve para punto fijo.

Acelera una convergencia lineal a una convergencia cuadrática.

Se calculan los 4 primeros términos: P_0, P_1, P_2, $\hat{P}_0$

Aquí no calculo P_3, sino que lo sustituyo por $\hat{P}_0$. $\hat{P}_0$ es mejor aproximación que P_3.

Suponemos $\hat{P}_0$ mejor aproximación que P_2

Aplicamos el punto fijo a $\hat{P}_0$ en vez de aplicarlo a P_2 para conseguir el P_3.

Cada tercer término es generado con Δ^2 de Aitken. Me dan P_0, calculo P_1 y P_2.

$P_0 \rightarrow$ Punto inicial
$P_1 \rightarrow$ Aplicar punto fijo a $P_0 = g(P_0)$
$P_2 \rightarrow$ Aplicar punto fijo a $P_1 = g(P_1)$
$P_3 \rightarrow$ Hago Aitken y lo sustituyo $= \hat{P}_0$
$P_4 \rightarrow g(P_3)$
$P_5 \rightarrow g(P_4)$
$P_6 \rightarrow$ Hago Aitken $\hat{P}_1$

Notación: Cuando hablamos de que no hay iteraciones del método Δ^2 de Aitken usamos un super 0 $\rightarrow P_0^{(0)}$.

Cuando aplico 1 vez Δ^2 de Aitken obtengo un super 1 $\rightarrow P_0^{(1)}$

¡¡¡NO ES UN EXPONENTE !!!

$$P_0^{(0)}, P_1^{(0)} = g(P_0^{(0)}), P_2^{(0)} = g(P_1^{(0)}) \rightarrow P_0^{(1)} = \{\Delta^2\} P_0^{(0)}$$

$$P_1^{(1)} = g(P_0^{(1)}), P_2^{(1)} = g(P_1^{(1)}) \longrightarrow P_0^{(2)} = \{\Delta^2\} P_0^{(1)},$$

$$P_1^{(2)} = g(P_0^{(2)}), P_2^{(2)} = g(P_1^{(2)}) \longrightarrow P_0^{(3)} = \{\Delta^2\} P_0^{(2)}$$

Ejemplo: $f(x) = x^2 - \cos(x)$ con $P_0 = 1$

Aplicamos punto fijo y aceleramos con Steffersen

Reescribimos la func despejando x

$$x^2 - \cos(x) = 0$$
$$x^2 = \cos(x)$$
$$x = \sqrt{\cos(x)} \longleftarrow g(x)$$

Comenzamos a iterar: Saco los 3 primeros con punto fijo y luego aplico Aitken.

Punto fijo

0	1
1	0,735052587
2	0,861275501

$P_0^{(0)} = P_0 = 1$

$P_1^{(0)} = g(P_0^{(0)}) = 0,735052587$

$P_2^{(0)} = g(P_1^{(0)}) = 0,861275501$

— Ahora Δ^2 de Aitken — Saldrá $P_0^{(1)}$

$$P_0^{(1)} = \hat{P}_0 = P_0 - \frac{(P_1 - P_0)^2}{P_2 - 2P_1 + P_0}$$

$$1 - \frac{(0{,}735052587 - 1)^2}{0{,}861275501 - 2 \cdot 0{,}735052587 + 1} = 0{,}820545868$$

Ahora el siguiente termino es 0,820545868

Y luego hago 2 veces punto fijo

$$\sqrt{\cos(0{,}820545868)} = 0{,}8257251338$$

$$\sqrt{\cos(0{,}8257251338)} = 0{,}8234222136$$

Y con estos 3 aplico Aitken

$$0{,}820545868 - \frac{(0{,}8257251338 - 0{,}820545868)^2}{0{,}8234222136 - 2 \cdot 0{,}8257251338 + 0{,}820545868} =$$

0,82413105

2 veces Punto fijo
y Aitken

	Punto fijo	Steffensen
1	1	0,820545868
2	0,735052587	0,8241131023
3	0,861275501	0,824132312
4	0,807137107	0,824132312

UNIVERSIDA
INTERNACI
DE LA RIOJA

Ejemplo:

- $x = g(x) = \sqrt{\cos(x)}$ **Newton:** $p_{n+1} = p_n - \dfrac{p_n^{\,2} - \cos(p_n)}{2 \cdot p_n + sen(p_n)}$

K	Punto fijo	Aitken	Steffersen	Newton
0	1.0	0.820545868	0.820545868	1.0
1	0.735052587	0.823387630	0.824131023	0.838218410
2	0.861275501	0.823989495	0.824132312	0.824241868
3	0.807137107	0.824103654	0.824132312	0.824132319
4	0.831606374	0.824126663		0.824132312
5	0.820785901	0.824131189		0.824132312
6	0.825618791	0.824132090		
7	0.823469674	0.824132268		
8	0.824427236	0.824132304		
9	0.824000957	0.824132311		
10	0.824190798	0.824132312		
11	0.824106268	0.824132312		
15	0.824131288			
20	0.824132330			
25	0.824132312			

Ejemplo 2: $2x^3 + 4x^2 - 2x - 5$ $P_0 = 1$

$$2x^3 + 4x^2 - 2x - 5 = 0 \longrightarrow \text{Despejo el } 4x^2$$

$$4x^2 = -2x^3 + 2x + 5$$

$$x^2 = \frac{-2x^3 + 2x + 5}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{-2x^3 + 2x + 5}{4}}$$

$$x = \frac{\sqrt{-2x^3 + 2x + 5}}{2} \longleftarrow g(x)$$

Punto fijo

0	1
1	1,11803398875
2	1,05368199729
3	1,09174997973

$$g(1) = \frac{\sqrt{-2x^3 + 2x + 5}}{2} = 1,118033989$$

$g(1,118033989) = 1,053681997$

$g(1,053681997) = 1,091749998$

Aitken $\hat{P}_0 = P_0 - \dfrac{(P_1 - P_0)^2}{P_2 - 2P_1 + P_0}$

$$1 - \frac{(1,11803398875 - 1)^2}{1,05368199729 - 2 \cdot 1,11803398875 + 1} = 1,076387574$$

Punto fijo 2 veces $g(1,076387574) = 1,079183474$

$g(1,079183474) = 1,077572852$

Aitken:

$$1,076387574 - \frac{(1,079183474 - 1,076387574)^2}{1,077572852 - 2 \cdot 1,079183474 + 1,076387574} = 1,075627969$$

¿?

P' examen:

- Formula
- Cómo se aplica

¿?

i	Steffensen
1	1,076387574
2	1,075627969

REPASO PARA EXAMEN

1. Dominio
2. Recta tangente
3. Límite
4. Extremos
5. Continuidad
6. Derivabilidad
7. Integral definida
8. Integral indefinida
9. Series
10. Asíntotas
11. Optimización
12. Área

Tema 1:
- Dominio y límites
- Continuidad y teoremas

Tema 2:
- Derivabilidad

Tema 3:
- Funciones derivables
- Extremos relativos
- Ecuaø recta tangente
- Optimización

Tema 5:
- Integrales definidas
- Calculo de areas

Tema 6:
- Integrales indefinidas

Tema 7:
- Criterio del cociente
- Criterio de la raíz

Temas 11 y 12
- Calcular raíces de polinomio
  - Tolerancia: error relativo $5 \cdot 10^{-3}$
  - Maximo 10 iteraøes
- Explicar metodos aceleraø
  - Bien explicados
  - Teorema Bolzano, corolario, TVI, teorema valor intermedio
- Explicar otro metodo o aplicarlo

¿Cuál debe ser el valor de K para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} 3x - K & \text{si } x < 3 \\ x^2 + K & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Para que sea continua tiene que existir el límite cuando x tiende a 3, que es donde se juntan

$$\lim_{x \to 3^-} (3x - K) = 9 - K$$

$$\lim_{x \to 3^+} x^2 + K = 9 + K$$

Para que exista límite cuando x tienda a 3

$$9 - K = 9 + K$$
$$0 = 2K$$
$$0 = K$$

$$\boxed{K = 0}$$

Respuesta: Para que la func sea continua debe existir el límite en ese punto y coincidir con el valor de la func en el punto.
Para calcular el límite se calculan los límites laterales; se igualan y sale $K = 0$

Además $f(3)$ tiene que existir, se toma en la segunda rama. Si K es 0, $f(3)$ es 9, que coincide con el valor del límite.

Calcula $\int \frac{1}{x^2+2x+3}$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$

symbolab

$R = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{Arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$ ← Trigo

Resolver $\lim_{x\to 0} (1+\text{arctg}\, x)^{\frac{a}{x}}$

$\frac{a}{0} = \infty$

$(1+0)^{\frac{a}{0}}$

$(1+0)^{\infty} = 1^{\infty} = \text{IND}$

FÓRMULA: $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to x_0} [f(x)-1]\cdot g(x)}$

$e^{\lim_{x\to 0} [(1+\text{arctg}\, x)-1]\cdot \frac{a}{x}}$

$1+0-1 \cdot \frac{a}{0} = 0 \cdot \frac{a}{0} = \frac{0}{0}$ ← IND.

Infinitesimo $x \sim \text{argctg}\, x$

$[1+x-1]\cdot\frac{a}{x}$

$\cancel{x}\cdot\frac{a}{\cancel{x}} \longrightarrow e^{a}$

Qué valor debe tener K para que f(x) sea continua en x = 0

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x < 0 \\ K & x = 0 \\ \dfrac{\cos x - 1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

f(0) es K, tiene que coincidir con el valor del límite cuando x tiende a 0, por izq. y x der.

$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = e^{1/0^-}$ $\quad \frac{1}{0^-}$ = 1 entre algo muy pequeño es infinito $= -\infty = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}}$

$\frac{1}{e^{\infty}} \to e^{\infty}$ es ∞ porque e es mayor que 1

$\frac{1}{\infty} = 0$ //

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ IND.

L'Hopital $\quad \frac{-\operatorname{sen} x}{1} = \frac{0}{1} = 0$ //

EXISTE el límite porque ambos valen 0 y debe coincidir con el valor de la func que es K.

K = 0

$$\int_0^1 \frac{x}{1+3x^2}\,dx$$

Reviso si tengo la derivada del denominador en el numerador.

$3x^2+1$

$6x \leftarrow$ derivada

$$\int_0^1 \frac{6\cdot x}{6\cdot 1+3x^2}\,dx$$

Arriba tengo x, si multiplico y divido por 6 ya tengo la derivada arriba

$$\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{6x}{1+3x^2}\,dx$$ → Ahora es muy fácil, es el ln del denom.

$$\frac{1}{6}\cdot \ln|1+3x^2|\Big]_0^1$$

Como es definida entre 0 y 1 sustituyo primero el 1

$$\frac{1}{6}\ln|1+3\cdot 1^2| = \ln 4$$

MENOS

sustituyo el 0

$$\frac{1}{6}\ln|1+3\cdot 0^2| = \ln 1$$

$$\frac{1}{6}(\ln 4 - \underbrace{\ln 1}_{0})$$

$$\underbrace{\frac{1}{6}\ln 4}_{\text{Puede quedar así la respuesta}} = L\sqrt[6]{4}$$

$$\sum \frac{(n+1)!\,(2n)!}{(3n)!}$$

Aplico cociente porque tengo factoriales.

El criterio del cociente dice que hay que calcular el límite

$\boxed{\text{Algo elevado a la n empiezo x criterio de cauchy o raíz y si hay factoriales se empieza x criterio del cociente.}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$a_{n+1} \rightarrow$ donde hay una n pongo n+1

$$\frac{(n+1+1)!\,(2(n+1))!}{3(n+1)!} = \frac{(n+2)!\,(2(n+1))!}{3(n+1)!} \Leftarrow a_{n+1}$$

$$\frac{(n+1)!\,(2n)!}{(3n)!} \Leftarrow a_n$$

$$\frac{\frac{(n+2)!\,(2(n+1))!}{3(n+1)!}}{\frac{(n+1)!\,(2n)!}{(3n)!}} = \frac{3n!\,(n+2)!\,(2(n+1))!}{3(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!}$$

$$3(n+1)! = (3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!$$

$$2(n+1)! = 2n+2 = (2n+2)(2n+1)(2n)!$$

$$\frac{\cancel{3n!}\,(n+2)!\,(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}\,(n+1)!\,\cancel{(2n)!}}$$

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)!$$

$$\frac{(n+2)(n+1)!\,(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)!} = \frac{(n+2)(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$

Aquí lo que importa es el coeficiente director del término más grande, porque lo que quiero es hacer el límite cuando $x \to \infty$

Multiplico $n \cdot 2n \cdot 2n = 4n^3$ ← Coef. director de numerador

$3n \cdot 3n \cdot 3n = 27n^3$ ← Coef. director de denom.

Cuando $n \to \infty$ aplico Leibniz $\frac{4}{27} < 1$

$\frac{4}{27}$ es menor que 1, por lo tanto la serie es CONVERGENTE

Calcular la ecuación de la recta tangente de $x = 0$

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}$$

Sabemos por teoría lo que es la derivada de la func en un punto. Es la pendiente de la recta tangente a la func de dicho punto.

Sabemos que $m_0{}^* = f'(0)$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (1-x^2) - x \cdot (-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$\frac{1 - x^2 + 2x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \longrightarrow \text{Necesito } f'(0) = \frac{1+0^2}{(1-0^2)^2} = \frac{1}{1} = 1$$

Esto es la pendiente

---

* m = pendiente

Tengo el punto $x=0$, puedo calcular y

$f(0) = \frac{0}{1-0^2} = \frac{0}{1} = 0$

$x=0$
$y=0$
$m=1$

El punto de tangencia es el $(0,0)$

Ecuación punto pendiente: $(y - y_0) = (x - x_0)$

$(y - 0) = (x - 0)$

$y = x$

$y = x$

$$\int_1^3 x\sqrt{4+5x^2}\,dx$$

La derivada de lo de dentro de la raíz es $10x$, es casi lo de afuera. Puedo multiplicar y dividir por 10

$$\int_1^3 \frac{10}{10} \cdot \frac{x\sqrt{4+5x^2}}{1}\,dx$$

$$\int \sqrt{u}\,du$$

$$\frac{1}{10}\int 10x\sqrt{4+5x^2}\,dx$$

$u = 4+5x^2$

$du = 10x\,dx$

$$\int u^{1/2}\,du = \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \quad \frac{u^{3/2}}{3/2} = \frac{u^{3/2}}{\frac{1}{\frac{3}{2}}} = \frac{2u^{3/2}}{3} = \frac{2\sqrt{u^3}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{(4+5x^2)^3}}{3}$$

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{2\sqrt{(4+5x^2)^3}}{3} = \frac{2\sqrt{(4+5x^2)^3}}{30} = \frac{1}{15}(4+5x^2)^{3/2}\Big]_1^3$$

Sustituyo 3 y resto sustituyo 1

$$\frac{1}{15}(343-27) = \frac{316}{15}$$

$f(x) = x \cdot |x|$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Para derivabilidad tengo que ver si es continua. límites laterales

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x^2 = -0^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0^2 = 0$$

SON IGUALES, $\therefore \exists$ límite y coincide con el valor de la func $f(0) = 0^2 = 0$

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} f'(0^+) &= 2 \cdot 0 = 0 \\ f'(0^-) &= -2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ES DERIVABLE}$$

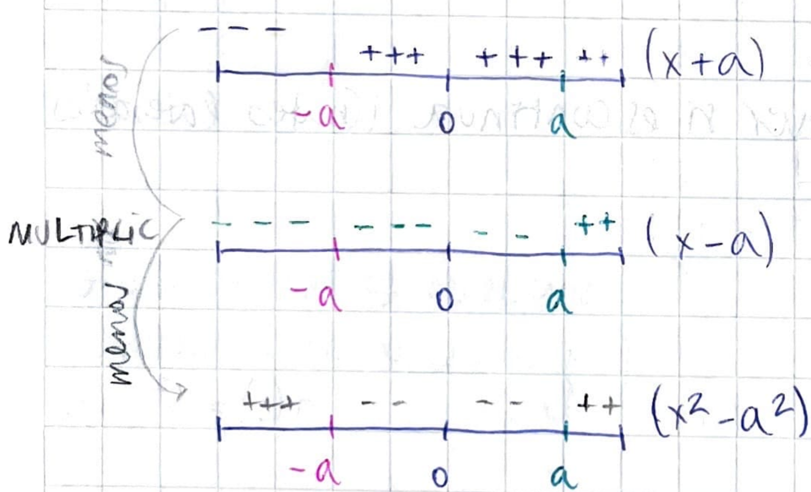
14 junio 21

$f(x)=|x^2-a^2|$

la dificultad es identificar c/u de sus ramas.

lo primero es escribir la func de otra forma: $|(x-a)(x+a)|$ y lo que queremos saber es donde la func es positiva y donde es negativa.

Esto porque la función modulo lo dice, es como ella misma si la funcion es mayor o igual que 0 o como menos ella misma $-f(x)$ donde la funcion sea menor que 0.



A partir de 0 es siempre positivo
A izq. de 0 será posi si x es mayor que a

p' x menor que -a, será negat.

La funcion $f(x)$ será como ella misma, es decir x^2-a^2 donde ella misma sea positiva o igual a 0. Eso ocurre en 2 trozos, entre $-\infty$ y $-a$ y entre a y $+\infty$. Y se comporta como $-f(x)$ si x está entre $-a$ y a

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a^2 & \text{si } x \geq a \text{ ó } x \leq -a \\ -x^2+a^2 & \text{si } -a < x < a \end{cases}$$

Para estudiar continuidad y derivabilidad hay que romper la primera rama (que contiene la ó) en 2 ramas.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-a^2 & \text{si } x \leq -a \\ -x^2+a^2 & \text{si } -a < x < a \\ x^2-a^2 & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Continuidad:

$\lim_{x \to -a} x^2-a^2 \quad (-a)^2-a^2 = a^2-a^2=0$

$\lim_{x \to -a^+} -x^2+a^2 \quad (-a^2)+a^2 = 0$

$f(-a) = 0$ Es continua en $-a$

$\lim_{x \to a^-} -x^2+a^2 = -a^2+a^2 = 0$

Es continua en a

$\lim_{x \to a^+} x^2-a^2 \quad a^2-a^2=0$

Derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2a \\ -2x+2a \\ 2x-2a \end{cases}$$

$\lim_{x \to -a^-} 2x-2a \quad 2\cdot -a-2a=-4a$

$\lim_{x \to -a^+} -2x+2a \quad -2\cdot(-a)+2a = 4a$

$2a+2a$

No es derivable en $-a$

$\lim_{x \to a^-} -2x + 2a \quad -2 \cdot a + 2a = -2a + 2a = 0$

$\lim_{x \to a^+} 2x - 2a \quad 2a - 2a = 0$

$f(a) = 0$

Es derivable en a